$2°/ * \ z-i=\frac{1}{2}\left[\sin\varphi+i(1-\cos\varphi)\right]-i$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\varphi-i(1+\cos\varphi)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\varphi-i2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2})=-i\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$$

$\forall\varphi\in\left]0,\pi\right[$ on a : $\frac{\varphi}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\cos\frac{\varphi}{2}>0$

d'où $z-i=\left[1,-\frac{\pi}{2}\right]\cdot\left[\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}\right]=\left[\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi-\pi}{2}\right]$

$$* \ \frac{z}{z-i}=\frac{\left[\sin\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}\right]}{\left[\cos\frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}=\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$3°/$ M d'affixe $z-i$ d'où M de coordonnées x et y tels que :

$$\begin{cases} x=\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\frac{\varphi-\pi}{2})=\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\sin\varphi \\ y=-\frac{(1+\cos\varphi)}{2} \end{cases}$$

$\sin\varphi=2x$ et $\cos\varphi=-1-2y$

comme $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\Leftrightarrow 4x^2+4(y+\frac{1}{2})^2=1\ \Leftrightarrow x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

d'où M appartient au cercle de centre $\omega(0,-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Or $\forall\varphi\in\left]0,\pi\right[$ on a : $0<x\le\frac{1}{2}$ et $-1<y<0$

M décrit le cercle $C(\omega,\frac{1}{2})\cap\mathcal{P}^{(+)}$ où $\mathcal{P}^{(+)}$ est le demi-plan d'équation $x>0$.